J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
12 (1977) 493-497

SUR LES STRUCTURES DE COURBURE D'ORDRE 2 DANS R^n

JACQUES GASQUI

Une structure de courbure d'ordre 2 dans $\boldsymbol{R}^n$ est un tenseur de type $(0, 4)$ sur $\boldsymbol{R}^n$, vérifiant les identités classiques auxquelles satisfait le tenseur de courbure d'une métrique riemannienne sur $\boldsymbol{R}^n$ (cf. identités (2) et (3)). Etant donné une structure α de courbure d'ordre 2 sur $\boldsymbol{R}^n$, nous nous proposons de résoudre le système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants:

$$\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} = \alpha_{ijkl} , \tag{1}$$

où les g_{ij} sont les composantes d'une 2-forme symétrique sur $\boldsymbol{R}^n$. Si g est une métrique riemannienne, son tenseur R de courbure de type $(0, 4)$ s'écrit:

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k} \right) \\ & + \sum_{p,q} g_{pq} (\Gamma^p_{jk} \Gamma^q_{il} - \Gamma^p_{ik} \Gamma^q_{jl}) , \end{aligned}$$

avec

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} \sum_h g^{hk} \left(\frac{\partial g_{hi}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{hj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} \right) .$$

Ainsi le premier membre de (1) est, à $\frac{1}{2}$ près, la partie principale de R. La condition de compatibilité de (1) est que α vérifie la deuxième identité de Bianchi par rapport à la connexion plate canonique sur $\boldsymbol{R}^n$. Nos calculs se ramènent facilement à ceux que nous avions fait dans [1] pour l'équation de Cartan pour les immersions isométriques. Si la condition de compatibilité est satisfaite, les résultats classiques sur les systèmes à coefficients constants permettent d'obtenir des solutions de (1) sur tout ouvert convexe de $\boldsymbol{R}^n$.

Les notations et le formalisme sont ceux de [2] et [1]. Je tiens à remercier H. Goldschmidt qui a bien voulu relire mon manuscrit et me faire part de ses remarques.

Tous les objets avec lesquels on travaille seront supposés différentiables de classe C^∞. On note respectivement $x^1, \cdots, x^n$ et T^* les coordonnées canoniques

Communicated by D. C. Spencer, September 30, 1975.

et le fibré cotangent de $\boldsymbol{R}^n$. Si ω est un tenseur de type $(0, p)$ sur $\boldsymbol{R}^n$ (i.e., est une section de $\otimes^p T^*$ sur $\boldsymbol{R}^n$), on posera

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}\right) = \omega_{i_1,\cdots,i_p} ,$$

pour tous entiers $i_1, \cdots, i_p$ compris entre 1 et n. Les tenseurs de type $(0, p)$ symétriques ou alternés sur une partie de leurs arguments seront toujours repérés par leurs composantes par rapport à la base $(dx^{i_1} \otimes \cdots \otimes dx^{i_p})_{1 \leq i_1, \cdots, i_p \leq n}$ de $C^\infty(\otimes^p T^*)$.

Une structure de courbure d'ordre 2, ou double 2-forme, sur $\boldsymbol{R}^n$ est une section α de $\Lambda^2 T^* \otimes \Lambda^2 T^*$ sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant

$$\alpha_{ijkl} = \alpha_{klij} , \tag{2}$$

$$\alpha_{ijkl} + \alpha_{jkil} + \alpha_{kijl} = 0 , \tag{3}$$

pour tous entiers i, j, k, l.

Si g est une 2-forme symétrique sur $\boldsymbol{R}^n$, on vérifie facilement que le tenseur $\omega(g)$ défini par

$$\omega(g)_{ijkl} = \frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^l} - \frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i \partial x^k}$$

est une structure de courbure d'ordre 2. En outre on a

$$\frac{\partial \omega(g)_{jklm}}{\partial x^i} + \frac{\partial \omega(g)_{kilm}}{\partial x^j} + \frac{\partial \omega(g)_{ijlm}}{\partial x^k} = 0 . \tag{4}$$

Les identités (4) reviennent à dire que $\omega(g)$ vérifie la deuxième identité de Bianchi par rapport à la connexion plate canonique sur $\boldsymbol{R}^n$ (cf. [3]).

On note G le sous-fibré de $\Lambda^2 T^* \otimes \Lambda^2 T^*$ dont les sections sont les structures de courbure d'ordre 2 et H le sous-fibré de $T^* \otimes G$ dont les sections ω vérifient la deuxième identité de Bianchi:

$$\omega_{ijklm} + \omega_{jkilm} + \omega_{kijlm} = 0 .$$

Soit $J_2(S^2T^*)$ le fibré des 2-jets de sections du fibré S^2T^* et soit $\varphi : J_2(S^2T^*) \to G$ le morphisme de fibrés vectoriels sur $\boldsymbol{R}^n$ défini par

$$\varphi(j_2(g)(x)) = \omega(g)(x) ,$$

si g est une 2-forme symétrique définie sur un voisinage de $x \in \boldsymbol{R}^n$. Si $\sigma(\varphi)$ désigne le symbole de φ (cf. [2]), on a

$$\sigma(\varphi)(C)_{ijkl} = C_{iljk} + C_{jkil} - C_{ikjl} - C_{jlik} ,$$

pour tout $C \in S^2T^* \otimes S^2T^*$. Le noyau de φ est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 sur S^2T^* que l'on notera R_2.

Posons $N = \frac{1}{2}n(n+1)$ et fixons une 2-forme symétrique B sur $\boldsymbol{R}^n$ à valeurs dans $\boldsymbol{R}^N$ telle que les vecteurs

$$B_{ij}(x) = B\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(x) , \qquad \text{avec } 1 \leq i \leq j \leq n ,$$

soient linéairement indépendants en tout point $x \in \boldsymbol{R}^n$. Si r est un entier, notons $S^rT^* \otimes \boldsymbol{R}^N$ le produit tensoriel du fibré S^rT^* par le fibré trivial sur $\boldsymbol{R}^n$ de fibre $\boldsymbol{R}^N$, et $\theta^{(r)}$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels sur $\boldsymbol{R}^n$ de $S^rT^* \otimes \boldsymbol{R}^N$ sur $S^rT^* \otimes S^2T^*$ défini par

$$\theta^{(r)}(C)_{i_1,\dots,i_rjk} = \langle B_{jk}, C_{i_1,\dots,i_r}\rangle ,$$

si $C \in S^rT^* \otimes \boldsymbol{R}^N$, où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\boldsymbol{R}^N$.

Soit $\rho: S^2T^* \otimes \boldsymbol{R}^N \to G$ le morphisme de fibrés vectoriels sur $\boldsymbol{R}^n$ défini par

$$\rho(C)_{ijkl} = \langle B_{il}, C_{jk}\rangle + \langle B_{jk}, C_{il}\rangle - \langle B_{ik}, C_{jl}\rangle - \langle B_{jl}, C_{ik}\rangle ,$$

si $C \in S^2T^* \otimes \boldsymbol{R}^N$. On vérifie facilement que les diagrammes

$$(5) \qquad \begin{array}{ccc} S^2T^* \otimes \boldsymbol{R}^N & \xrightarrow{\rho} & G \\ {\scriptstyle\theta^{(2)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{id}} \\ S^2T^* \otimes S^2T^* & \xrightarrow{\sigma(\varphi)} & G \end{array} .$$

et

$$(6) \qquad \begin{array}{ccc} S^{r+1}T^* \otimes \boldsymbol{R}^N & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S^rT^* \otimes \boldsymbol{R}^N \\ {\scriptstyle\theta^{(r+1)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\theta^{(r)}} \\ S^{r+1}T^* \otimes S^2T^* & \xrightarrow{\delta} & T^* \otimes S^rT^* \otimes S^2T^* \end{array}$$

commutent, où δ est le morphisme de Spencer (cf. [2]).

Reprenant alors les calculs du § 4 et des propositions 5.1 et 5.2 de [1], en remplaçant $T_Y^\perp$ par $\boldsymbol{R}^N$ et ρ_{*p} par ρ, la condition de "rang maximum" imposée à B permet d'affirmer que Ker (ρ) est un sous-fibré involutif de $S^2T^* \otimes \boldsymbol{R}^N$. D'après la commutativité de (5) et (6), le symbole de R_2, noyau de $\sigma(\varphi)$, est aussi involutif.

Si $C \in S^3T^* \otimes S^2T^*$, on a

$$\sigma(\varphi) \circ \delta(C)_{ijklm} = C_{ijmkl} + C_{iklјm} - C_{ijlkm} - C_{ikmjl} .$$

En sommant l'expression ci-dessus par permutation circulaire sur i, j, k, on obtient zéro ; ainsi l'image de $\sigma(\varphi)\circ\delta$ est contenue dans H. Toujours d'après la proposition 5.1 de [1], on a $\mathrm{Im}\,(\rho\circ\delta) = H$: combinant ce dernier résultat avec la commutativité de (5) et (6), on en déduit que l'image de $\sigma(\varphi)\circ\delta$ est égale à H.

Si R_3 désigne le premier prolongement de l'équation R_2, on a, d'après [2], la suite exacte

$$R_3 \xrightarrow{\pi_2} R_2 \xrightarrow{\mathrm{K}} (T^* \otimes G)/H \ ,$$

où K est le morphisme de fibrés vectoriels défini comme suit : si $p = j_2(g)(x) \in R_2$, avec g section de S^2T^* sur un voisinage de $x \in \boldsymbol{R}^n$, $K(p)$ est la classe de β dans $(T_x^* \otimes G_x)/H_x$, où β est l'élément de $T_x^* \otimes G_x$ défini par

$$\beta_{ijklm} = \frac{\partial}{\partial x^i}(\omega(g)_{jklm})(x) \ .$$

Mais, d'après (4), on a $K = 0$, donc R_2 est formellement intégrable. Des calculs précédents et du théorème 4.3 de [2], on déduit que la condition de compatibilité que doit vérifier le second membre α du système (1) est la deuxième identité de Bianchi :

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\alpha_{jklm} + \frac{\partial}{\partial x^j}\alpha_{kilm} + \frac{\partial}{\partial x^k}\alpha_{ijlm} = 0 \ .$$

On a alors le

Théorème. *Soit α une structure de courbure d'ordre 2 sur $\boldsymbol{R}^n$ vérifiant la deuxième identité de Bianchi par rapport à la connexion plate canonique sur $\boldsymbol{R}^n$. Si U est un ouvert convexe (resp. ouvert convexe borné) de $\boldsymbol{R}^n$, il existe une 2-forme symétrique (resp. métrique riemannienne) g sur U telle que*

$$\omega(g) = \alpha \ .$$

Démonstration. L'existence de solutions sur un ouvert convexe est un résultat classique sur les systèmes à coefficients constants (cf. [4]). L'existence de solutions métriques riemanniennes sur un ouvert convexe borné U s'en déduit alors facilement : si g est une 2-forme symétrique sur U vérifiant $\omega(g) = \alpha$, la forme $\tilde{g}$ définie sur U par

$$\tilde{g}_{ij} = g_{ij} + \lambda\delta_{ij} \ ,$$

avec $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$ assez grand, est une métrique riemannienne sur U qui vérifie encore $\omega(\tilde{g}) = \alpha$.

References

[1] J. Gasqui, *Sur l'existence d'immersions isométriques locales pour les variétés riemanniennes*, J. Differential Geometry **10** (1975) 61–84.
[2] H. Goldschmidt, *Existence theorems for analytic linear partial differential equations*, Ann. of Math. **86** (1967) 246–270.
[3] R. S. Kulkarni, *On the Bianchi identities*, Math. Ann. **199** (1972) 175–204.
[4] B. Malgrange, *Systèmes différentiels à coefficients constants*, Séminaire Bourbaki, 15ième année, 1962–63, Exp. 246.

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE